Zespół Szkół Technicznych im. Mikołaja Kopernika
w Zielonej Górze

WEWNĄTRZSZKOLNY KURS DOSKONALENIA NAUCZYCIELI MATEMATYKI

Artur Adam

Zastosowanie programu Derive 4 w nauczaniu matematyki

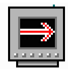
Zielona Góra 2004/2005

DERIVE FOR WINDOWS
w wersji 4

1. Wprowadzenie

Derive jest programem, który wspomaga obliczenia matematyczne oraz rysowanie wykresów.
Jego czwarta wersja Derive for Windows, w skrócie DfW, działa w środowisku Windows 95/98.
Wersja instalacyjna programu oraz poniższy skrypt znajduje się w internecie na stronie szkoły www.zsto.sytes.net lub www.mojaszkola.pl
W polskich księgarniach dostępna jest książka Adama Marlewskiego "Derive", w której szczegółowo opisane są funkcje programu w wersjach wcześniejszych (co nie powinno być przeszkodą gdyż nazwy i działania poleceń i funkcji są takie same we wszystkich wersjach programu).
W internecie, pod adresem http://www.math.hawaii.edu/lab/, można znaleźć podręcznik w języku angielskim (w formacie pdf), w całości poświęcony studiowaniu matematyki z Derivem.

2. Rozpoczęcie pracy z programem

Po zainstalowaniu programu, na pulpicie ekranu pojawi się ikona: 
Przez podwójne jej kliknięcie uruchamiamy program.
Domyślnie otwarte zostanie okno algebraiczne. W górnej części ekranu widoczny jest pasek menu z poleceniami oraz przyciskami do wywoływania najczęściej używanych funkcji programu.
Derive udostępnia trzy typy okien:

- Algebra : do wykonywania działań algebraicznych,
- 2D - Plot : do tworzenia wykresów dwuwymiarowych,
- 3D - Plot : do tworzenia wykresów trójwymiarowych.

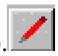
Ćwiczenie
Ustaw dwa okna, Algebra i 2D - Plot, obok siebie w pionie.

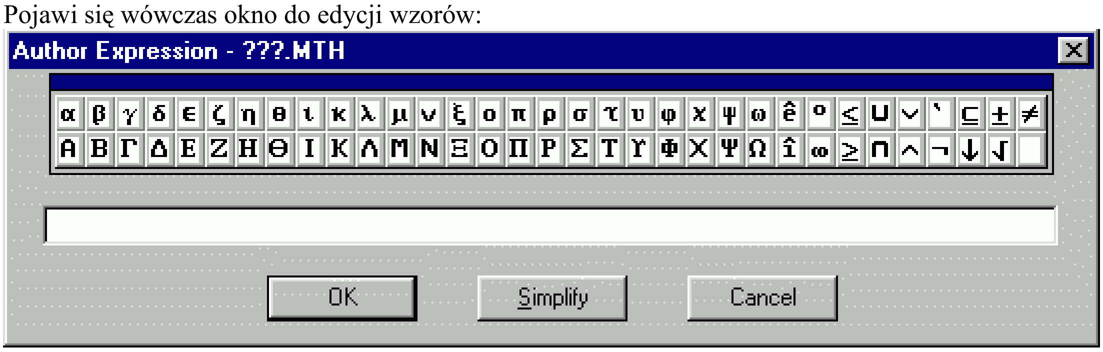
Mając otwarte okno Algebra, wykonaj polecenia:

- Z menu wybierz polecenie **Window**.
- Z podmenu polecenia Window wybierz polecenie **New 2D-plot Window**.
- Ponownie wybierz z menu polecenie **Window**.
- Z podmenu polecenia Window wybierz polecenie **Tile Vertically**.

Jak widać z powyższego ćwiczenia, okna otwierać i ustawiać za pomocą poleceń Window paska menu (lub odpowiednich przycisków). Jeśli ekran zawiera kilka okien, typ okna można odczytać z jego górnego paska. Kolor niebieski paska oznacza, że dane okno jest aktywne. Zestaw poleceń zależy od typu aktywnego okna.
W menu jest dostęp do wszystkich możliwych funkcji programu ale używanie przycisków przyspiesza większość operacji. Przesunięcie kursorem myszki nad ikoną przycisku pozwala przeczytać krótkie objaśnienie danego polecenia.

3. Wpisywanie wyrażeń matematycznych

Aby wpisać wyrażenie matematyczne należy należy uaktywnić okno algebraiczne **Algebra** i otworzyć okno do edycji wzorów i wybierać polecenie menu **Author/Expression** (lub kliknąć myszką przycisk).
Pojawi się wówczas okno do edycji wzorów:



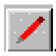
W polu edycyjnym wpisujemy wyrażenie używając klawiatury i udostępnionych nad polem symboli.
Wciśnięcie przycisku **OK** powoduje wyświetlenie wyrażenia na ekranie w postaci symbolicznej.
Polecenie **Simplify** przeniesie na ekran wynik działania lub wyrażenie w wersji uproszczonej według domyślnych opcji.
Każde wyrażenie wyświetlone jest na ekranie w osobnym wierszu z przypisanym automatycznie numerem.
Chcąc anulować wpis w oknie edycyjnym **Author Expression** wciskami klawisz **Cancel**.
Wyrażenia wpisujemy używając zwykłej składni:

- **dodawanie** klawiszem + ,
- **odejmowanie** klawiszem - ,
- **dzielenie** klawiszem /,
- **mnożenie** klawiszem * lub spacji, lub w przypadku mnożenia liczby przez zmienną można pomiędzy nic nie wpisywać (wyrażenia 2*x, 2 x, 2x traktowane są równoważnie),
- **potęgowanie** klawiszem ^ (Shift 6), np. 2 do potęgi 3 piszemy 2^3.
- Można też wpisywać **równania** np. **2x+3=5** i **nierówności** np. **x<4**, **x>**7, **2x+3<=5**, **2x+3>=4** lub **definiować funkcje** np. **f(x):=2x+5**.

Jeśli po kliknięciu **OK** lub **Simplify** pojawi się komunikat **Syntax Error** to zwykle chodzi o błędy spowodowane brakiem nawiasów itp.
Należy być ostrożnym z używaniem nawiasów kwadratowych, gdyż stosuje się je na ogół do definiowania wektorów.
Wyrażenia na ekranie pojawiają się w kolejno ponumerowanych liniach co ułatwia dalszą edycję.
Poniższa tabela zawiera przykłady działania edytora wyrażeń.

Zapis w oknie edycyjnym	Klawisz	Wynik na ekranie
2+3	OK	**2+3**
2+3	Simplify	**5**
2+3=	OK lub Simplify	**2+3=5**
2 3	OK lub Simplify	**2·3**
2 3 lub 2*3	OK	**2·3**
2 3 lub 2*3	Simplify	**6**
x^2	OK lub Simplify	$\mathbf{x^2}$
x^2a	OK lub Simplify	$\mathbf{x^2a}$
x^(2a)	OK lub Simplify	$\mathbf{x^{2a}}$
sqrt(9+16) lub √(9+16)	OK	
sqrt(9+16) lub √(9+16)	Simplify	**5**
2x+3=7	OK lub Simplify	**2x+3=7**
f(x):=2x+3	OK	**F(x) :=2x+3**
f(x)=2x+3	OK lub Simplify	**f·x=2x+3**

4. Edycja wyrażeń

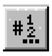
Zaznaczanie wyrażeń
Aby zaznaczyć wyrażenie znajdujące się na ekranie, starczy kliknąć myszką na linię, w której wyrażenie to się znajduje. Wyrażenie zostanie podświetlone (domyślnie kolorem niebieskim). Jeśli dane wyrażenie jest złożone, można kolejnymi kliknięciami zaznaczać poszczególne wyrażenia prostsze.
Przykład
#1: $(x-1)^2+5x+4$
#1: (x-1)2+5x+4(podświetlenie po kliknięciu na wiersz)
#1: $(x-1)^2+5x+4$ (podświetlenie po kliknięciu na pierwszy składnik)
#1: $(x-1)^2+5x+4$ (podświetlenie po ponownym kliknięciu na pierwszy składnik)>
Zaznaczone wyrażenia można kopiować i wklejać do pola ona edycyjnego Author Expression, co pozwala uniknąć niepotrzebnego przepisywania długich wyrażeń.
Korekta
Przypuśćmy, że wpisałeś wyrażenie, nacisnąłeś **OK** i stwierdziłeś, że coś jest nie tak. Aby wprowadzić poprawkę, podświetl wyrażenie i uruchom edytor wyrażeń Author Expression przyciskiem . Gdy kursor miga w polu edycyjnym naciśnij prawy przycisk myszki. Otworzy się menu podręczne, z którego możesz wybrać polecenie **Insert Expression**. Podświetlone wyrażenie zostanie skopiowane do pola edycyjnego i możesz nanieść stosowne poprawki.
Tworzenie opisu
Czasami wygodnie jest wprowadzenie wiersza z opisem działań. Starczy w tym celu wprowadzić w oknie edycyjnym opis w znakach cudzysłowu, na przykład:

```
#1: "Liczby pierwsze mniejsze od 10"
#2: [2, 3, 5, 7]
```

Operacje na wierszach z wyrażeniami
Następujące przyciski umożliwiają operacje na wierszach:

- -  usuwa podświetlony wiersz

- -  cofa ostatnie polecenie usunięcia wiersza

- -  numeruje wiersze od góry w kolejności ich występowania na ekranie

W pasku menu znajdują się te same polecenia:
- Edit/Remove(usuń),
- Edit/Unremove,
- Edit/Move (przemieść),

z dodatkowymi opcjami dostepnymi w oknach dialogowych jakie się pojawią.
Możemy na przykład w ten sposób usunąć kilka kolejnych wierszy na raz lub przemieścić wiersz o danym numerze w inne wybrane miejsce.

Tworzenie wyrażeń złożonych

Przykład: wykorzystania numeracji wierszy z wyrażeniami:

Załóżmy, że na ekranie znajdują się linie z wyrażeniami:
`#3: 2x+5`
`#7: x+8`
Aby utworzyć wyrażenie **`(2x+5)/(x+8)`**, otwieramy okno edycyjne **Author Expression**, wpisujemy: **`#3 / #7`** i zatwierdzamy przyciskiem **OK**.
Do tworzenia lub poprawiania wyrażeń złożonych wygodne jest używanie klawiszy funkcyjnych F3 lub F4, które służą do wklejania wyrażeń z ekranu do pola edycyjnego okna Author Expression:
- **F3** wkleja podświetlone wyrażenie,
- **F4** wkleja podświetlone wyrażenie w nawiasach.

Te same polecenia, o nazwach **Insert Expression F3** oraz **(Insert Expresson) F4**, dostępne są także **w menu podręcznym** okna edycyjnego **Author Expression**. Menu podręczne otworzy się po wciśnięciu **prawego przycisku myszki**.

Przykład: wykorzystanie klawisza F3

Załóżmy, że w wyrażeniu **`(2x+5)/(x+8)`**, które znajduje się już na ekranie, chcemy wprowadzić poprawkę bo w miejscu ósemki miała być trójka:
- Otwórz okno **Author Expression**.
- Podświetl na ekranie **`(2x+3)/(x+8)`**.
- Wciśnij **F3**,
- Zmaż 8 i wpisz 3.
- Wciśnij **OK**.

Przykład: wykorzystanie klawisza F4

Wprowadziliśmy poprawkę ale teraz chcemy wpisać wyrażenie **`((2x+3)/(x+3))(x+8)`**.
- Otwórz okno **Author Expressio**n.
- Podświetl na ekranie **`(2x+3)/(x+3)`**.
- Wciśnij **F4**.
- Podświetl na ekranie **`x+8`**
- Wciśnij **F4**
- Wciśnij **OK**

Do kopiowania i wklejania wyrażeń można też używać standardowych funkcji systemu Windows:
- **Edit/Copy** lub skrótu klawiszowego **Ctrl+C** - do kopiowania,
- **Edit/Paste** lub skrótu klawiszowego **Ctrl+V** - do wklejania.

5. Wywoływanie wyniku

W celu otrzymania wyników działań lub przekształcania wyrażeń używamy na ogół polecenia dostępnego w domyślnej opcji podstawowej **Simplify/Basic** na przycisku i w różnych oknach edycyjnych na przyciskach z napisem **Simplify**.
Dostępne opcje tego polecenia: **Basic**, **Expand**, **Factor**, **Approximate**, **Substitute for**, można wybrać z listy rozwijalnej po wybraniu polecenia **Simplify** z górnego menu.

Pokrótce omówimy tu znaczenie i działanie tych poleceń.
Simplify/Factor (skrót klawiszowy **Ctrl+F**)
Zamienia na iloczyn. Liczbę naturalną rozkłada na czynniki pierwsze, wielomian (do 4-go stopnia) sprowadza do postaci iloczynowej z uwzględnieniem opcji: **trivial** (dla liczb), **square free** (bez pierwiastków), **rational** (wymierne), **radical** (rzeczywiste), **complex** (zespolone), które należy wybrać w oknie dialogowym, które się ukaże po wydaniu polecenia.

Wyrażenie	Opcja	Wynik działania **Simplify/Factor**
60	dowolna	$2^2\cdot3\cdot5$
7	dowolna	7
$\frac{3}{5}+\frac{2}{7}$	dowolna	$\frac{31}{5\cdot7}$
x^2-1	trivial	x^2-1
x^2-1	dowolna oprócz trivial	$(x-1)\cdot(x+1)$
x^2-2	radical, complex	$(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})$
x^2+1	complex	$(x+i)\cdot(x-i)$

Simplify/Approximate (skrót klawiszowy **Ctrl+G**)
Przedstawia w przybliżeniu wynik działania arytmetycznego lub wartości funkcji. Z opcjami domyślnymi polecenie to dostępne jest na przycisku . Podaje przybliżoną wartość dziesiętną, domyślnie z dokładności do 6 miejsc po przecinku. Można to zmienić w oknie dialogowym wpisując odpowiednią liczbę w polu **Digits of precision**.
Simplify/Substitute (skrót **Ctrl+T**)
Do wyboru mamy dwie możliwości:

- **Simplify/Substitute for/Variable** - pozwala podstawić liczby lub wyrażenia do innych wyrażeń w miejsce zmiennej. Polecenie to dostępne jest także na przycisku .

- **Simplify/Substitute for/Subexpression** - pozwala podstawić wyrażenie lub liczbę w miejsce podświetlonego wyrażenia w obrębie wyrażenia bardziej złożonego w jednym lub we wszystkich jego wystąpieniach (opcja **One** lub **All** w oknie dialogowym)

Wyrażenie	Wyrażenie podstawione	Opcja	Wynik działania **Simplify/Substitute**
$(x-3)^2+5(x-3)$	10		$(10-3)^2+5(10-3)$
$(x-3)^2+5(x-3)$	4y		$(4y-3)^2+5(4y-3)$
$(x-3)^2+5(x-3)$	a	**One**	$a^2+5(x-3)$
$(x-3)^2+5(x-3)$	a	**All**	a^2+5a

6. Rozwiązywanie równań i nierówności

Do rozwiązywania równań i nierówności służy polecenie **Solve** dostępne na przycisku , jednak wywołując polecenie **Solve** z menu mamy możliwość wybrania jednej z trzech opcji:

- **Solve/Algebraically** (rozwiąż algebraiczne - jak na przycisku).
  Derive rozwiązuje algebraicznie równania wielomianowe do stopnia czwartego i wyniki podaje w postaci wektora rozwiązań. W przypadku równań trygonometrycznych, podaje skończoną liczbę rozwiązań podstawowych z domyślnego przedziału.

- **Solve/Numerically** (rozwiąż numerycznie).
  W celu otrzymania przybliżonych rozwiązań równania (np. gdy rozwiązanie algebraiczne jest niemożliwe do wykonania), należy podać przedział ograniczony, w którym program ma szukać rozwiązania. Nawet jeśli w podanym przedziale jest więcej rozwiązań, Derive wyświetli tylko jedno (pierwsze napotkane). Aby uzyskać następne rozwiązanie, należy ponownie wydać polecenie rozwiązania numerycznego, tym razem w przedziale nie zawierającym rozwiązania wcześniej otrzymanego.
- **Solve/System** (rozwiąż układ równań liniowych). W przypadku rozwiązywania układu równań liniowych, należy podać ich liczbę i w kolejnych wierszach wpisać równania. Pod wierszami znajduje się puste okno, które należy uaktywnić kursorem myszki (aby pokazały się wszystkie zmienne literowe użyte przy zapisywaniu równań) i zaznaczyć zmienne niewiadome. Należy to zrobić nawet jeśli wybór liter oznaczających niewiadome wydaje się oczywisty.

7. Definiowanie funkcji i stałych

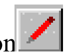
Funkcje i stałe definiuje się za pomocą symbolu przypisania **:=**.

- Aby zdefiniować funkcję `f(x)=2x+1` należy w oknie edycyjnym **Author Expression**, wpisać **`f(x):=2x+1`** i zatwierdzić **OK**.

- Aby zdefiniować stałą `a=2p` należy w oknie edycyjnym **Author Expression** wpisać **`a:= 2p`** i zatwierdzić **OK**.

Uwaga. Jeśli wymażemy linie ekranu ze zdefiniowaną funkcją lub stałą, pozostają one nadal w pamięci programu. Dla przykładu załóżmy, że na ekranie znajduje się linia z definicją funkcji:
`F(x):=2x+1`

Możemy ją wymazać przez podświetlenie i wydanie polecenia Remove przyciskiem 
Linia z definicją znikła.

Otwórzmy teraz okno edycyjne Author Expression  i wpiszmy w polu edycyjnym **`f(2)`**. Po zatwierdzeniu **Simplify** na ekranie pokaże się wartość funkcji
`5`
Aby faktycznie **usunąć z pamięci** definicję funkcji **f**, należy zastosować do niej przypisanie puste
`f(x):=`
Stałe i funkcje można także definiować wykorzystując odpowiednie polecenia menu **Declare/Function**, **Declare/Variable** i wypełniając pola w oknach dialogowych, które się ukażą.
Definiowanie funkcji na przedziałach
Definicję funkcji określonej różnie na różnych na przedziałach, na przykład

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & dla\ x\in(-\infty,1) \\ x^2 & dla\ x\in\langle 1,2\rangle \\ 4 & dla\ x\in(2,\infty) \end{cases}$$

można wprowadzić na dwa sposoby:

1. Za pomocą wbudowanej funkcji **`IF(w, t, n)`**, gdzie:

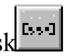
   w oznacza warunek (funkcje zdaniową),
   t oznacza wartość gdy warunek jest spełniony,
   n oznacza wartość gdy warunek jest niespełniony):
   `f(x):=IF(x<1,2x+1,IF(x<=2,x^2,4))`
   Należy tu zwrócić uwagę na poprawne zagnieżdżanie argumentów funkcji **IF**.

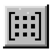
2. Za pomocą wbudowanej funkcji **`CHI(a, x, b)`**, która

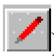
   przyjmuje wartość **1** gdy x ∈ (a,b)
   oraz wartość **0** w przeciwnym przypadku:
   `f(x):=(2x+1) CHI(-inf, x,1) + x^2 CHI(1,x,2) + 4 CHI(2,x,inf)`
   Funkcja zdefiniowana w ten sposób liczy wartości tylko na tych argumentach, na których jest ciągła.

8. **Wektory i macierze**

8.1 Definiowanie wektorów i macierzy

- Do zdefiniowania wektora należy wybrać przycisk  lub polecenie menu **Author/Vector**.

- Do zdefiniowania macierzy wybieramy przycisk  lub polecenie menu **Author/Matrix**.

W obu przypadkach otwarte zostaną kolejne okna dialogowe, do zadeklarowania wymiarów i wypełnienia wartości elementów wektora lub macierzy. Elementami macierzy mogą być zarówno liczby jak i wyrażenia matematyczne. Wektory i macierze można też definiować bezpośrednio w polu okna **Author/Expression** (wywołanego przyciskiem ) używając nawiasów kwadratowych dla oddzielenia samej macierzy (wektora) i jej wierszy i przecinków dla oddzielenia elementów i wierszy.

Na przykład:

- wektor `[2, x,` x^2`]` definiujemy wpisując `[x, x^2 ,x^3]`
- macierz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{bmatrix}$ definiujemy wpisując `[[1,3,5], [7,9,11]]`

8.2 Generowanie wektorów i macierzy

Funkcja **VECTOR**

Jeśli elementy wektora lub macierzy można zadać wzorem, do jej wygenerowania wygodne jest użycie funkcji **VECTOR(w, j, p, k, s)** gdzie kolejne argumenty mają następujące znaczenia:

- **w** - element wektora lub wiersz macierzy ze zmienną j
- **j** - zmienna występująca w wyrażeniu w
- **p** - wartość początkowa zmiennej j lub wektor wartości jakie ma przyjmować zmienna j Jeśli p jest wektorem, to dalsze argumenty k i s pomijamy.
- **k** - wartość, której **j** nie może przekroczyć
- s - wartość wymierna przyrostu zmiennej (jeśli s=1 to argument s można pominąć).

Przykłady:

- `VECTOR(2n, n, 1, 4)` po zatwierdzeniu Simplify generuje wektor `[2, 4, 6, 8]`.
- `VECTOR(ax^2, a, 1, 4)` po zatwierdzeniu Simplify generuje wektor [x^2, $2x^2$, $3x^2$, $4x^2$].
- `VECTOR(ax^2, a, [1, 5, 10])` po zatwierdzeniu Simplify generuje wektor [x^2, $5x^2$, $10x^2$].
- `VECTOR(2n, n, 1, 4, 2)` po zatwierdzeniu Simplify generuje wektor `[2, 6]`.
- `VECTOR([x, x^2], x, 1, 3)` po zatwierdzeniu Simplify generuje macierz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$.

Funkcja **VECTOR** dostępna jest także jako polecenie menu **Calculus/Vector**. Po wydaniu tego polecenie otworzy się okno dialogowe, które należy uzupełnić:

- W górnym polu należy wpisać wzór (**w**)
- Przy etykiecie **Variable** wybieramy zmienną (**j**)
- Przy etykiecie **Starting Value** wpisujemy wartość początkową (**p**) zmiennej (**j**)
- Przy etykiecie **Ending Value** wpisujemy wartość końcową (**k**) zmiennej (**j**)
- Przy etykiecie S**tep Size** wpisujemy wartość przyrostu zmiennej (**j**)

Funkcja `IDENTITY_MATRIX(n)`

Generuje macierz jednostkową stopnia n, na przykład `IDENTITY_MATRIX(2)` generuje, po zatwierdzeniu Simplify, macierz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8.3 Odwołania do elementów wektora lub macierzy

1. Operator **SUB**
   Służy do wyznaczenia elementu wektora lub macierzy o danym indeksie (indeksach). Zapis **SUB** można zastąpić symbolem strzałki skierowanej w dół ↓, dostępnej w oknie edycyjnym **Author Expression**.
   Przykłady
   - `[a, b, c] SUB 2` (lub `[a, b, c]↓2`) i zatwierdzenie **OK** daje wynik na ekranie: $[a, b, c]_2$.
   - `[a, b, c] sub 2` i zatwierdzenie **Simplify** daje wynik **b** (drugi element wektora).
   - `[[2, 3, 5], [7, 1, 4]] SUB 2 SUB 3` i zatwierdzenie **OK** daje wynik
     $$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2,3}$$
     .
   - `[[2, 3, 5], [7, 1, 4]] SUB 2 SUB 3` i zatwierdzenie **Simplify** daje wynik **4** (element w drugim wierszu i w trzeciej kolumnie)

2. Funkcja **ELEMENT**
   Działa podobnie jak operator **SUB**.
   ELEMENT(v, n) oznacza **n**-tą współrzędną wektora **v**.

   ELEMENT(m, n, k) oznacza element macierzy **m** w wierszu numer **n** i w kolumnie numer **n**.
   Przykłady
   - `ELEMENT([a, b, c], 2)` i **Simplify** daje wynik **b**.
   - `ELEMENT([a, b, c], [c, d, e], 2, 1)` i **Simplify** daje wynik **c** (element w drugim wierszu i w pierwszej kolumnie).

3. Funkcja **SELECT**
   Wyszukuje elementy macierzy, które spełniają określony warunek. **SELECT(w(k), k, v)** i **Simplify** daje wyniku wektor tych elementów **k** wektora **v**, które spełniają warunek **w(k)**.
   Przykłady
   - `SELECT(x<4, x, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10])` i **Simplify** daje w wyniku macierz `[1, 2, 3]`.
   - `SELECT(PRIME(k), k, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10])` i **Simplify** daje w wyniku wektor liczb pierwszych `[2,3,5,7]`

   Funkcja **SELECT** działa także na elementach ciągu. **SELECT(w(n), n, p, k, s)** wyznacza elementy **n** spełniające warunek **w(n)**, w ciągu liczb od **p** do **k** występujących co **s** (jeśli **s=1**, to argument **s** można pominąć).
   Przykład
   - SELECT(PRIME(n), n, 1, 100) i Simplify daje w wyniku wektor liczb pierwszych występujących w ciągu liczb od 1 do 100.

8.4 Podstawowe działania na macierzach i wektorach

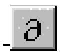
Działanie	Znaczenie
`A+B`	Suma macierzy **A** i **B**
`A-B`	Różnica macierzy **A** i **B**
`k*A` lub `kA`	Iloczyn macierzy **A** przez skalar **k**
`A . B` (kropka dziesiętna między **A** i **B**)	Iloczyn macierzy **A** i **B** lub iloczyn skalarny wektorów **A** i **B**
`CROSS (A, B)`	Iloczyn wektorowy wektorów 3-wymiarowych
`A'`	Transpozycja macierzy **A**
`DET(A)`	Wyznacznik macierzy kwadratowej **A**
`TRACE(A)`	Ślad macierzy kwadratowej **A** (suma elementów na przekątnej)
`A^(-1)`	Macierz odwrotna do macierzy odwracalnej **A**
`ABS(A)`	Długość wektora **A**

9. Sumy i iloczyny uogólnione, granice, pochodne i całki

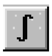
Operacje matematyczne wymienione w tytule tego rozdziału należą do rodziny działań objętych w języku angielskim wspólną nazwą Calculus. Stąd też naciśnięcie polecenia menu **Calculus** otwiera listę dalszych poleceń z nazwami tych operacji. Po zaznaczeniu każdego z poleceń otwiera się okno dialogowe. Poniższe objaśnienia dotyczą wypełniania okien dialogowych. Niektóre z poleceń dostępne są na przyciskach.
Uwaga: Jeśli Derive nie jest w stanie podać wyniku operacji, to po zatwierdzeniu Simplify, na ekranie wyświetlona zostaje (w postaci symbolicznej) funkcja opisująca dane polecenie, tak jak po zatwierdzeniu OK.

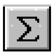
Calculus / Limit - granica - 
Oblicza granicę ciągu lub funkcji :
- górne pole: wzór ciągu (np. `(1+1/x)^(2x)` lub nazwa wcześniej zdefiniowanej funkcji `f(x)`
- przy `x` zmierzającym do ... **Limit Point** (np. inf lub 4)
    - ☐ prawostronną **Right**
    - ☐ lewostronną **Left**
    - ☐ obustronną **Both**

W przypadku gdy `x` zmierza do plus lub minus nieskończoności (`inf`) wybór jednej z trzech ostatnich opcji nie ma znaczenia.

Calculus / Differentiate - pochodna -
Oblicza pochodną funkcji
- górne pole: wzór (np. `y+x^2`) lub nazwa wcześniej zdefiniowanej funkcji (np. `f(x, y)`)
- przyjmij za zmienną **Variable** (np. `x`)
- oblicz pochodna rzędu **Order** (np. `2`, czyli drugą pochodną funkcji)

Calculus / Taylor Series - szereg Taylora
Przybliża funkcję wielomianem będącym sumą częściową szeregu Taylora
- górne pole: wzór (np. `sin(x)`) lub nazwa wcześniej zdefiniowanej funkcji (np. `f(x)`)
- w otoczeniu punktu **Expansion Point** (domyślnie 0, jak dla szeregu Maclaurina)
- wielomianem stopnia niewiększego niż **Order** (np. `5`)

Calculus / Integrate - Całka 
Oblicza całkę z funkcji.
- górne pole: wzór (np. e^{2xy}) lub nazwa wcześniej zdefiniowanej funkcji (np. `f(x, y)`)
- przyjmując za zmienną **Variable** (np. `x`)
- oznaczoną **Definite**
    - ☐ granica górna całki **Upper Limit** (np. `5` lub `inf` dla całki niewłaściwej)
    - ☐ granica dolna całki **Lower Limit** (np. `3` lub `-inf` dla całki niewłaściwej)
- nieoznaczoną **Indefinite**

Calculus / Sum - suma uogólniona - 
Oblicza sumę wyrazów ciągu liczbowego lub funkcyjnego.
- górne pole: wzór składnika ciagu liczbowego(np. `1/n^2`) lub funkcyjnego (np. `x^n /n!`)
- zmienna oznaczająca indeks (numer) składnika Variable (np. `n`)
- suma oznaczona **Definite**
    - ☐ wartość górna indeksu **Upper Limit** (np.`10`, może być też nowa zmienna `k` lub `inf`)
    - ☐ wartość dolna indeksu **Lower Limit** (np. `1`)
- suma nieoznaczona **Indefinite** składników o indeksach naturalnych

Uwaga. W większości przypadków Derive oblicza sumy metodą antyróżnic (antidifferences). Antyróżnicą składnika `f(n)` nazywa się różnicę `F(n)=f(n+1)-f(n)`. Sumę składników f(n) od n = p do n = k można wyrazić w postaci różnicy: `f(p)+f(p+1)+..+f(n)+...+f(k)=F(k+1)-F(p)`. Szczegóły na ten temat można znaleźć w książce Adama Marlewskiego "Derive".
Derive udostępnia funkcję `SUM`, która umożliwia dodatkowo:
- sumowanie według indeksów występujących skokowo, na przykład:
  `SUM(n^2, n, 1, 5, 2)` oblicza `12+32+52`.
- sumowanie według indeksów zadanych wektorem, na przykład:
  `SUM(f(n),n,[1,3,7])` oblicza sumę `f(1)+f(3)+f(7)`.
- sumowanie wielokrotne, na przykład
  `SUM(a+b,[a,b],[1,2],[3,4])`, symbolicznie ,
  oblicza sumę .

Calculus / Product - iloczyn - Π

Oblicza iloczyn wyrazów ciągu.

- górne pole: wzór czynnika ciagu liczbowego `c(n)`
- zmienna oznaczająca indeks (numer) czynnika **Variable** `n`
- iloczyn oznaczony **Definite**
    - ☐ wartość górna indeksu **Upper Limit** (np.`10`, `k` lub `inf`)
    - ☐ wartość dolna indeksu **Lower Limit** (np. `1`)
- iloczyn nieoznaczony **Indefinite** składników o indeksach naturalnych

Podobnie jak w przypadku sumy, szersze możliwości niż polecenie Calculus/Product daje funkcja `PRODUCT`, która działa analogicznie jak funkcja `SUM`.

Calculus / Vector - wektor

Generuje skończony ciąg (wektor) o zadanym wyrazie ogólnym

- górne pole: wzór na wyraz ciągu w (np. `x^n`)
- zmienna **Variable** wyrażenia w (np. `n`)
- początkowa wartość zmiennej (`n`) Starting Value (np. `5`)
- końcowa wartość zmiennej (`n`) Ending Value (np. `10`)
- wartość skokowa przyrostu zmiennej (`n`) **Step Size** (np. `2`)

Do generowania wektora ciągu można także wykorzystać funkcję `VECTOR`, opisaną w rozdziale 8.2 Generowanie macierzy i wektorów.

10.Tworzenie wykresów

Z programem Derive można tworzyć obrazy funkcji, równań i macierzy liczbowych zdefiniowanych w oknie algebraicznym. Do wyświetlania obrazów dwuwymiarowych służy okno **2D-Plot**, do trójwymiarowych - okno **3D-Plot**.

10.1 Zarządzanie oknami

Ostatnie dwa przyciski poleceń okna algebraicznego służą do uruchomienia okien: **2D-Plot** i **3D-Plot** .

Ostatni przycisk poleceń **Algebra Window** w oknach **2D-Plot** i **3D-Plot** -otwiera ponownie okno algebraiczne. Gdy korzystamy tylko z tych przycisków, otwarcie jednego z okien powoduje zasłonięcie poprzednio otwartego. Używając poleceń menu Window lub odpowiednich skrótów klawiszowych (krótko skrótów) można ustawić na ekranie kilka okien. Poniżej opisane są polecenia listy, która zostanie rozwinięta po kliknięciu myszką polecenia **Window:**

- **New Algebra View** lub skrót **Ctrl+1**
  -otwiera nowe okno algebraiczne
- New **2D-plot View** lub skrót **Ctrl+2**-
  -otwiera nowe okno 2D-Plot
- New **3D-plot View** lub skrót **Ctrl+3**
  - otwiera nowe okno 3D-Plot
- **Cascade** lub skrót **Ctrl+Shift+C**
  - ustawia otwarte okna kaskadowo
  Przy tej opcji okno aktywne przysłania inne okna, ale każde tych okien lekko wystaje za następnym i łatwo dają się przełączać kliknięciem myszki na wystającej części okna.
- **Tile Horizontally** lub **Ctrl+Shift+H**
  -ustawia na ekranie wszystkie dotychczas otwarte okna w poziomie jedno nad drugim. Okno aktywne w momencie wydania tego polecenia ustawione zostaje najwyżej.
- **Tile Vertically** lub **Ctr+Shift+V**
  - ustawia na ekranie wszystkie dotychczas otwarte okna pionowo jedno obok drugiego. Okno aktywne w momencie wydania tego polecenia ustawione zostaje jako pierwsze od lewej strony
  .
- Poniżej tych poleceń wypisane nazwy wszystkich otwartych dotychczas okien (aktualnie widocznych lub niewidocznych). Kliknięcie na danej nazwie powoduje uaktywnienie właściwego okna.

Każde otwarte okno widoczne na ekranie zaopatrzone jest (jak wszystkie okna w systemie Windows) w górny pasek, który ma kolor niebieski gdy jest aktywne i szary w przeciwnym razie, trzy małe ikonki w prawym górnym rogu służą odpowiednio (patrząc od prawej strony): do zamykania, powiększania na cały ekran, zawijania do ikony i odwrotnie .

Wielkość okna zmieniamy za pociągnięciem myszką jego brzegu. W ten sposób można dowolnie ustawiać kilka okien ekranie, np. trzy okna jedno nad drugim i czwarte obok.
Z lewej strony górnego paska widnieje opis typu okna: **Algebra**, **2D-plot** lub **3D-Plot**.
Aby uaktywnić dane okno starczy kliknąć w dowolnym miejscu jego obszaru wewnętrznego.
Zestaw poleceń menu i przycisków dostosowany jest zawsze do typu aktywnego okna.

10.2 Wykresy w oknie 2D-Plot

W oknie **2D-Plot** można wyświetlać zdefiniowane w oknie algebraicznym następujące typy obrazów:

- **wykres funkcji określonej wzorem** postaci `f(x)`, np. `2x+1`, np. `f(x):=e^(5x+3)`
  Zakresu zmiennej `x` nie trzeba podawać, ponieważ jest on automatycznie wyznaczony na podstawie szerokości i ustawień okna, w którym obraz jest wyświetlany.
- **wykres równania dwóch zmiennych**, np. `x^2+(y-1)3 = sin(2x)`,
- **wykres funkcji podanej parametrycznie** tzn. w postaci wektora `[a(x),b(x)]`, gdzie `a` i `b` są funkcjami zmiennej `x` w zadanym przez użytkownika zakresie (np. `[2cos(4x-1),3sin(2x)]`)
- **punkty wymienione w macierzy dwukolumnowej** (pierwsza kolumna zawiera odcięte, a druga rzędne punktów), np. `[[1,2],[3,5],[6,-1]]`
- **odcinki prostych łączących punkty** wymienione w macierzy dwukolumnowej.

10.3 Tworzenie obrazów w oknie 2D-plot

Przykład 1 - Wykres funkcji

- W oknie algebraicznym:
  - ☐ Otwórz okno edycyjne Author Expression, wpisz `2x+1` (lub `f(x):=e^(5x+3)`) i wciśnij OK.
  - ☐ Podświetl na ekranie wpisane wyrażenie.
  - ☐ Wciśnij przycisk **2D-plot Window** aby otworzyć okno 2D-Plot.
  - ☐ Dla wygody - ustaw okno algebraiczne i 2D-Plot pionowo obok siebie: wybierz z menu **Window/Tile vertically**
- W oknie 2D-Plot:
  - ☐ Wciśnij przycisk **Plot Expression** aby wyświetlić wykres.
    Zauważ, że ikona ta wygląda tak samo jak w oknie algebraicznym ale spełnia tu inną funkcję.

Przykład 2 - Wykres równania

- Kliknij myszką na okno algebraiczne aby je uaktywnić.
  - ☐ Otwórz okno edycyjne Author Expression. wpisz `x^2+(y-1)^3 = sin(2x)` i wciśnij **OK**.
  - ☐ **Podświetl** na ekranie wpisane wyrażenie.
  - ☐ Uaktywnij okno **2D-Plot**.
- W oknie 2D-Plot:
  - ☐ Wciśnij przycisk **Plot Expression** aby wyświetlić wykres.
  - ☐ Wciśnij przycisk **Delete last plot** aby zmazać ostatnio narysowany wykres
  - ☐ Ponownie zrób to samo aby zmazać kolejny wykres.

Przykład 3 - wykres funkcji podanej parametrycznie

- Uaktywnij okno algebraiczne
  - ☐ Otwórz okno edycyjne Author Expression, wpisz `[2cos(4x-1), 3sin(2x)]` i wciśnij **OK**.
  - ☐ Podświetl na ekranie wpisane wyrażenie.
  - ☐ Uaktywnij okno **2D-Plot**.
- W oknie 2D-Plot
  - ☐ Wciśnij przycisk **Plot Expression**
  - ☐ Przed wyświetleniem wykresu zostanie otwarte okno dialogowe **Parametric Plot Parameters**. Zmień lub pozostaw bez zmian zawartości pól:
    - Minimum Value - wartość minimalna zmiennej x
    - Maximum Value - wartość minimalna zmiennej x
    - Plot Mode -sposób rysowania:
    - Line - liniowy
    - Point - punktowy
    - Points -punkty: Small -małe, Medium - średnie, Large -duże
    - Number - liczba punktów
  - ☐ Zatwierdź OK.

- ☐ Zmaż wykres, ponownie go narysuj wypróbowując inne opcje.

Przykład 4 - punkty

- ■ Uaktywnij okno algebraiczne
  - ☐ Otwórz okno edycyjne **Author Expression**, wpisz macierz dwukolumnową `[[1,2],[3,5],[6,-1]]` i wciśnij **OK**.
  - ☐ Podświetl na ekranie zdefiniowaną macierz.
- ■ Uaktywnij okno 2D-Plot
  - ☐ Wciśnij **Plot Expression** aby wyświetlic punkty (1,2), (3,5), (6,-1).
  - ☐ Jeśli nie wszystkie punkty są widoczne, tzn., że nie mieszczą się w ekranie.
  - ☐ Wciśnij przycisk **Zoom Both Out** lub klawisz **F10** aby powiększyć zakres punktów wyświetlanych na ekranie. Jeśli nadal nie wszystkie punkty są widoczne, ponownie zastosuj polecenie.

Przykład 5 - odcinki

- ■ Uaktywnij okno algebraiczne
  - ☐ Podświetl na ekranie macierz `[[1,2],[3,5],[6,-1]]`.
  - ☐ Uaktywnij okno 2D-Plot
- ■ Wybierz polecenie menu **Options/Points** aby wybrać opcję łączenia kolejnych punktów zadanych macierzą odcinkami prostych. W oknie dialogowym:
  - ☐ W polu **Connect** (połączenie) wybierz opcję **Yes** (domyślnie włączona jest opcja **No**, dlatego w poprzednim przykładzie nie było potrzeby korzystania z polecenia opcji).
- ■ Wciśnij Plot Expression aby wyświetlic łamaną (otwartą) łączącą odcinkami punkty (1,2), (3,5),(6,-1).

Uwaga: Aby narysować trójkąt o wierzchołkach (1,2), (3,5), (6,-1) należy (w oknie algebraicznym) do macierzy `[[1,2],[3,5],[6,-1]]` dopisać na końcu pierwszy wiersz (ze współrzędnymi pierwszego punktu) aby otrzymać `[[1,2],[3,5],[6,-1],[1,2]]`

UWAGA !!!

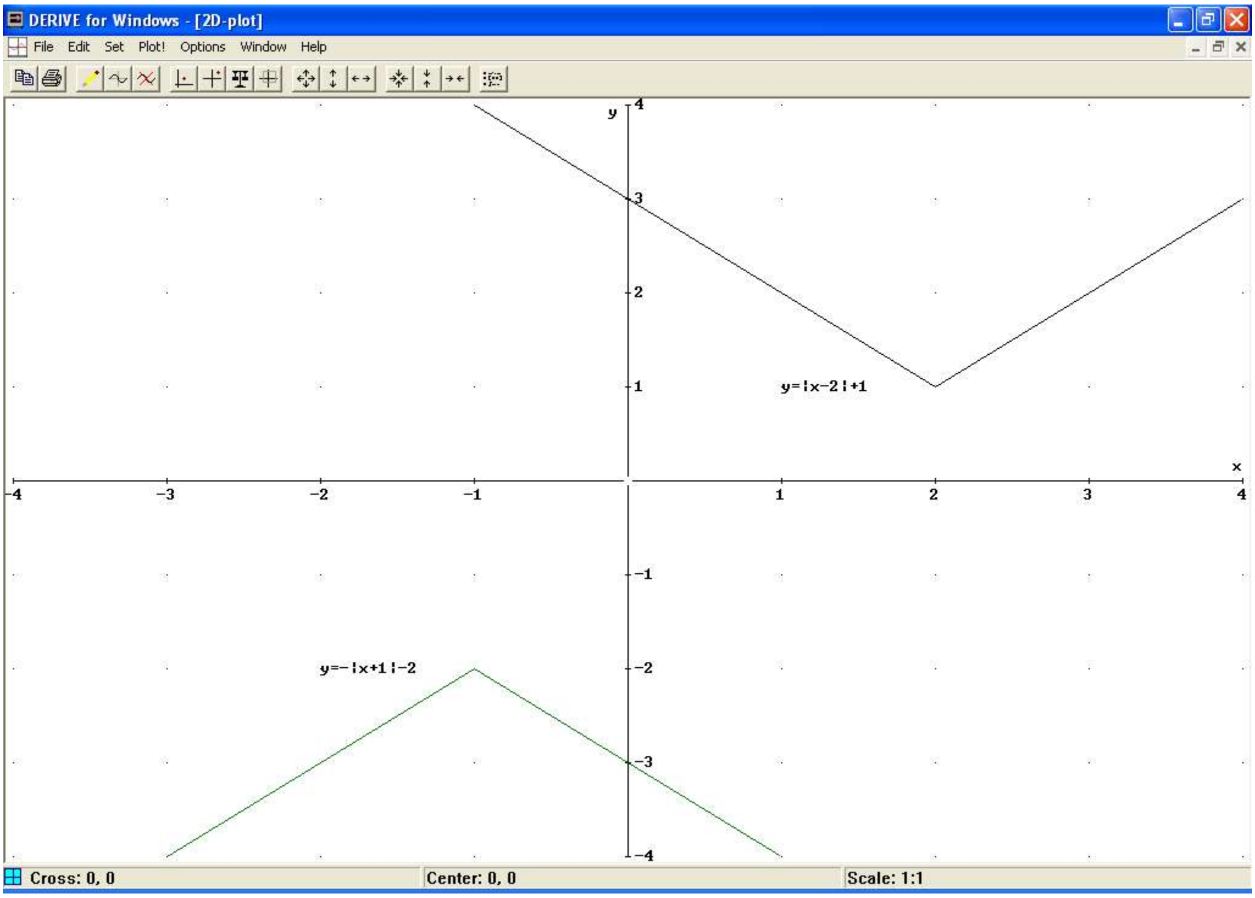
Definiowanie funkcji:

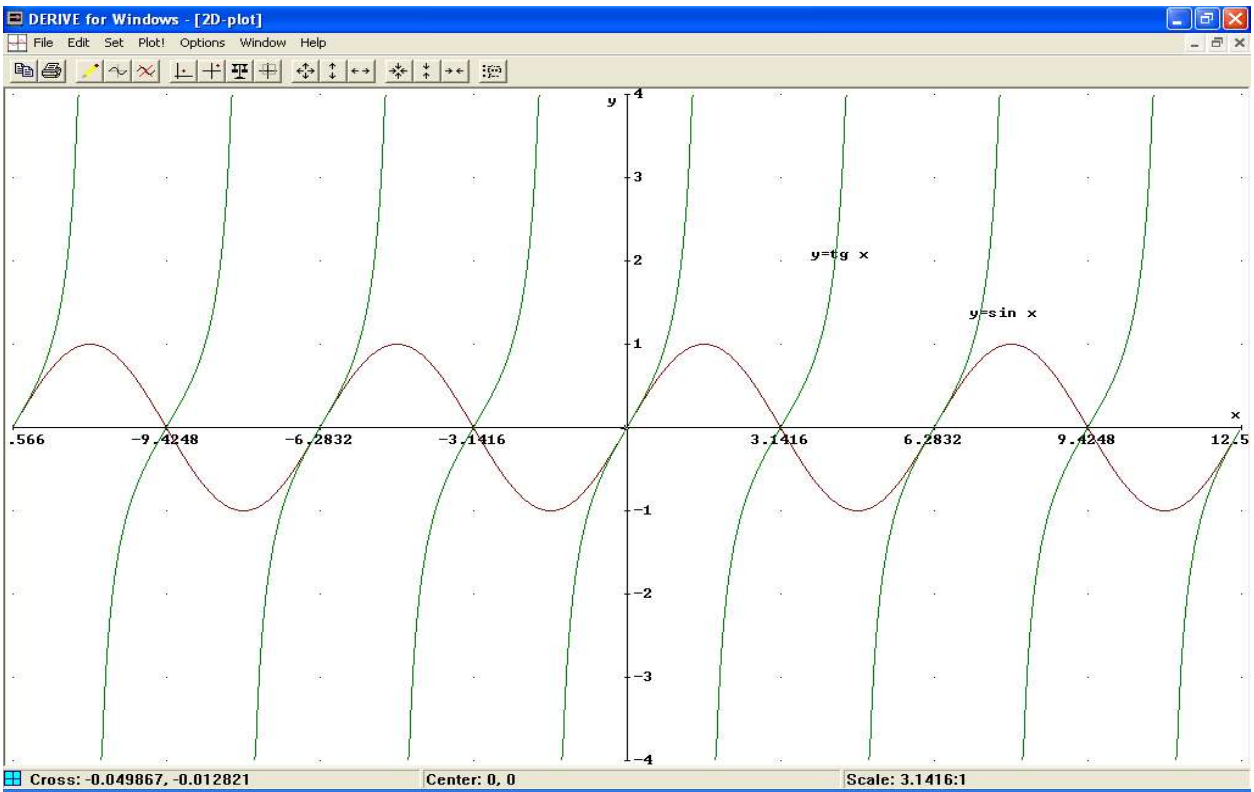
• Wartość bezwzględna z liczby x (y = |x|):	y=abs(x)
• Sinus x (y = sin x):	y=sin(x)
• Cosinus x (y = cos x):	y=cos(x)
• Tangens x (y = tg x):	y=tan(x)
• Cotangens x (y = ctg x):	y=cot(x)

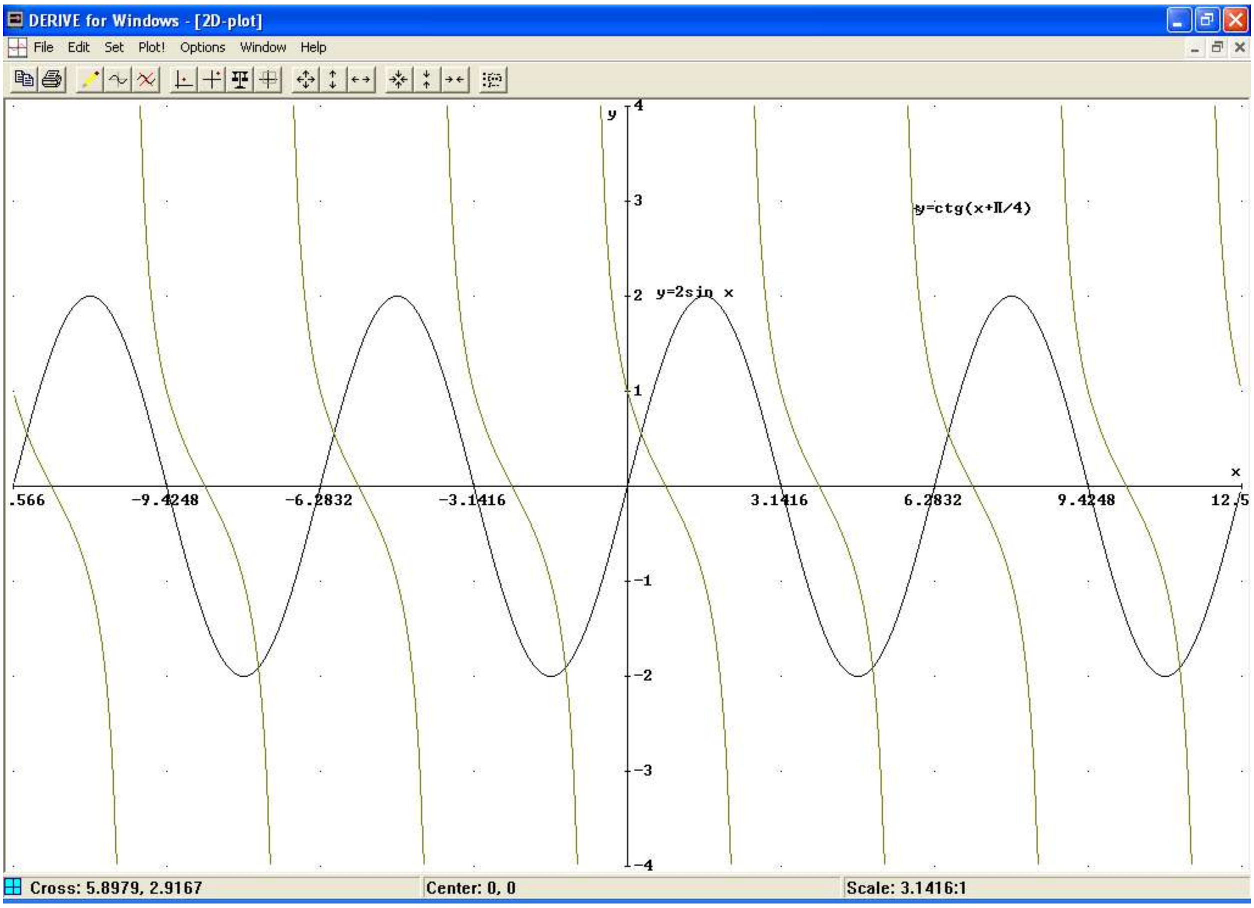
Zadania

Sporządź wykresy funkcji:

(a) y=|x-2|+1, y=-|x+1|-2
(b) y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctgx
(c) y=2sinx, y=-tgx
(d) y=cos(x-Π), y=ctg(x+Π/4)


DERIVE for Windows - [2D-plot]
File Edit Set Plot! Options Window Help
y=|x-2|+1
y=-|x+1|-2
Cross: 0, 0
Center: 0, 0
Scale: 1:1


DERIVE for Windows - [2D-plot]
File Edit Set Plot! Options Window Help
y=tg x
y=sin x
Cross: -0.049867, -0.012821
Center: 0, 0
Scale: 3.1416:1


DERIVE for Windows - [2D-plot]
File Edit Set Plot! Options Window Help
y=ctg(x+Π/4)
y=2sin x
.566
-9.4248
-6.2832
-3.1416
3.1416
6.2832
9.4248
12.5
Cross: 5.8979, 2.9167
Center: 0, 0
Scale: 3.1416:1